פתרונות לדף תרגילים מס' 1 – טורים חיוביים

1.1 בתרגילים הבאים קבעו האם הטורים מתכנסים או לא. אם כן, מצאו את סכום הטור. **רמז:** *בדקו האם הטור הנחקר הוא טור הנדסי.*

(א)

$$4+\frac{8}{5}+\frac{16}{25}+\frac{32}{125}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}4\left(\frac{2}{5}\right)^n,\ a_0=4,\ q=\frac{a_1}{a_0}=\frac{\frac{8}{5}}{4}=\frac{2}{5},\ q=\frac{a_2}{a_1}=\frac{16}{25}\Big/\frac{8}{5}=\frac{2}{5},\ldots$$

טור הנדסי

$$S_n=a_0\frac{1-q^{n-1}}{1-q},\qquad \lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}4\frac{1-\left(\frac{2}{5}\right)^n}{1-\frac{2}{5}}=\frac{4}{\frac{3}{5}}=\frac{20}{3}=S,$$

הטור מתכנס וסכומו $20/3$.

(ב)

$$\frac{1}{36}+\frac{1}{30}+\frac{1}{25}+\frac{6}{125}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{36}\left(\frac{6}{5}\right)^n,$$

$$a_0=\frac{1}{36},\ q=\frac{a_1}{a_0}=\frac{1}{30}:\frac{1}{36}=\frac{6}{5},\ q=\frac{a_2}{a_1}=\frac{1}{25}:\frac{1}{30}=\frac{6}{5},\ldots$$

טור הנדסי עם $q=\frac{6}{5}>1$ ולכן מתבדר.

(ג)

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^{n+1}}{5^n}=\sum_{n=0}^{\infty}4\left(\frac{4}{5}\right)^n,\ a_0=4,\ q=\frac{4}{5},$$

טור הנדסי

$$S_n=a_0\frac{1-q^{n-1}}{1-q},\qquad \lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}4\cdot\frac{1-\left(\frac{4}{5}\right)^n}{1-\frac{4}{5}}=\frac{4}{1/5}=20=S,$$

הטור מתכנס וסכומו 20.

(ד)

$$\sum_{n=1}^{\infty}3^{1-n}5^{n/2}=\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{5}\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^{n-1},\ a_1=\sqrt{5},\ q=\frac{\sqrt{5}}{3},$$

טור הנדסי

$$S_n=a_1\frac{1-q^n}{1-q},\qquad \lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\sqrt{5}\frac{1-\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^n}{1-\frac{\sqrt{5}}{3}}=\frac{\sqrt{5}}{\frac{3-\sqrt{5}}{3}}=\frac{3\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}=S,$$

הטור מתכנס וסכומו $3\sqrt{5}/(3-\sqrt{5})$.

(ה)

$$\sum_{n=4}^{\infty}\frac{3}{n(n-1)}=3\sum_{n=4}^{\infty}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=3\cdot\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\ldots\right),$$

$$S_n=3\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=3\cdot\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{n}\right),$$

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=3\cdot\frac{1}{3}=1,$$

הטור מתכנס וסכומו 1.

(ו)

$$a_n=\frac{n^2}{3(n+1)(n+2)},\qquad \lim_{n\to\infty}a_n\neq 0,$$

טור מתבדר.

(ז)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\sin\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n+1}\right]=\sin 1-\sin\frac{1}{2}+\sin\frac{1}{2}-\sin\frac{1}{3}+\ldots,$$

$$S_n=\sin 1-\sin\frac{1}{2}+\sin\frac{1}{2}-\sin\frac{1}{3}+\ldots+\sin\frac{1}{n-1}-\sin\frac{1}{n}+\sin\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n+1}=$$

$$=\sin 1-\sin\frac{1}{n+1},\qquad S=\lim_{n\to\infty}S_n=\sin 1,$$

הטור מתכנס וסכומו $\sin 1$.

1.2 מצאו עבור אילו ערכים של x הטורים הבאים מתכנסים וחשבו את סכומם.

(א)

$$q=\frac{x}{5},\qquad \left|\frac{x}{5}\right|<1,\qquad |x|<5,$$

הטור מתכנס כאשר $x\in(-5,5)$ וסכומו $S=\frac{x}{5}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{5}}=\frac{x}{5-x}$.

(ב)

$$q=\frac{1}{x},\qquad \left|\frac{1}{x}\right|<1,\qquad |x|<1,$$

הטור מתכנס כאשר $x\in(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$ וסכומו $S=\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{x}}=\frac{1}{x-1}$.

(ג)

$$q=2\sin x,\qquad |2\sin x|<1,\qquad |\sin x|<\frac{1}{2},$$

הטור מתכנס כאשר $k\in\mathbf{N}$, $x\in\left(-\frac{\pi}{6}+\pi k,\frac{\pi}{6}+\pi k\right)$ וסכומו $S=\frac{2\sin x}{1-2\sin x}$.

(ד)

$$q=\tan x,\qquad |\tan x|<1,$$

הטור מתכנס כאשר $k\in\mathbf{N}$, $x\in\left(-\frac{\pi}{4}+\pi k,\frac{\pi}{4}+\pi k\right)$ וסכומו $S=\frac{\tan x}{1-\tan x}$.

1.3 כדור גומי נופל מגובה של 4 מטרים ואז קופץ לחצי הגובה ממנו נפל וחוזר חלילה. מצאו את המרחק הכולל שהכדור עבר אם הוא ממשיך לקפוץ באופן זה עד אינסוף.

המרחק שהכדור נע הוא $4+2+2+1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ldots=4+2\sum_{n=1}^{\infty}2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$$4+2\sum_{n=1}^{\infty}2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=4+2\cdot 2\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=12$$

הכדור נע 12 מ'.

1.4 הוכיחו את הטענות הבאות.

(א) אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס, אז הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$ מתבדר.

(ב) אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתבדר ו- $c\neq 0$, אז הטור $\sum_{n=1}^{\infty}ca_n$ גם מתבדר.

(ג) אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס והטור $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ מתבדר, אז הטור $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ מתבדר.

פתרון:

(א) הטור $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס לכן $\lim_{n\to\infty}a_n=0$. מכן נובע ש- $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}\neq 0$ ולכן הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$ מתבדר.

(ב) יהי $S_n=a_0+a_1+a_2+\ldots+a_n, n=0,1,2,\ldots,.$ הטור $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתבדר לכן הגבול $\lim_{n\to\infty}S_n$ הוא אינסופי או לא קיים. מכן נובע שעבור כל $c\neq 0$ הגבול $\lim_{n\to\infty}cS_n$ גם לא קיים אז הטור $\sum_{n=1}^{\infty}ca_n$ מתבדר.

(ג) הטור $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ אז הגבול $\lim_{n\to\infty}A_n$ קיים, כאשר $\{A_n\}$ - סדרת הסכומים החלקיים של הטור $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$. הטור $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ מתבדר אז הגבול $\lim_{n\to\infty}B_n$ לא קיים, כאשר $\{B_n\}$ - סדרת הסכומים החלקיים של הטור $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$. הגבול של $\{S_n\}$ - סדרת הסכומים החלקיים של הטור $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ לא קיים, כי $\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}(A_n+B_n)$ לכן הטור $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ מתבדר.

1.5 קבעו האם הטורים מתכנסים או מתבדרים (אין צורך לחשב את הסכום).

(א)

$$u_n=\frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2},\ \rho=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=\frac{e}{2}>1,$$

ממבחן השורש נובע שהטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$ מתבדר, למעשה, כי לא מתקיים כאן התנאי ההכרחי.

(ב)

$$u_n=\frac{2^n}{n^6},\qquad \rho=\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}\cdot n^6}{(n+1)^6\cdot 2^n}=2\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^6=2>1,$$

הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^6}$ מתבדר משימוש במבחן המנה.

(ג)

$$u_n=\frac{1}{n\ln n},\quad f(x)=\frac{1}{x\ln x},\ \int_2^\infty\frac{dx}{x\ln x}=\lim_{b\to\infty}\int_2^b\frac{dx}{x\ln x}=\left|\begin{matrix}t=\ln x\\ dt=\frac{dx}{x}\end{matrix}\right|=\lim_{b\to\infty}\int_{\ln 2}^{\ln b}\frac{dt}{t}=\lim_{b\to\infty}\ln(\ln b)-\ln(\ln 2)=\infty$$

האינטגרל $\int_2^\infty\frac{dx}{x\ln x}$ מתבדר ולכן, ממבחן האינטגרל, הטור $\sum_{n=2}^\infty\frac{1}{n\ln n}$ גם מתבדר.

(ד)

$$u_n=\frac{1}{(2n+1)!},\qquad \rho=\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+3}=0<1,$$

הטור $\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{(2n+1)!}$ מתכנס.

(ה)

$$u_n=\frac{n^2}{n!},\qquad \rho=\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n^2}=0<1,$$

הטור $\sum_{n=1}^\infty\frac{n^2}{n!}$ מתכנס.

(ו)

$$u_n=\frac{n^2+1}{n^3},\qquad v_n=\frac{1}{n},\ \lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{n^2}=1,$$

הטור $\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n}$ מתבדר לכן גם הטור $\sum_{n=1}^\infty\frac{n^2+1}{n^3}$ גם מתבדר ממבחן ההשוואה הגבולי.

(ז)

$$u_n=\frac{2n-1}{3^n},\qquad \rho=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{2n-1}}{3}=\frac{1}{3}<1,$$

הטור $\sum_{n=1}^\infty\frac{2n-1}{3^n}$ מתכנס.

(ח)

$$u_n=\arctan^n\frac{1}{n},\qquad \rho=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\arctan\frac{1}{n}\right)=0<1,$$

הטור $\sum_{n=1}^\infty\arctan^n\frac{1}{n}$ מתכנס.

1.6 בדקו שהטורים הבאים מתכנסים, וחשבו את סכומם.

(א) $\sum_{n=0}^\infty\left(\frac{2}{3}\right)^n$. (ב) $\sum_{n=2}^\infty\left(\frac{1}{2^n}-\frac{1}{2^{n+1}}\right)$. (ג) $\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{9n^2+3n-2}$. (ד) $\sum_{n=0}^\infty\left(\frac{7}{3^n}-\frac{6}{(n+3)(n+4)}\right)$.

(ה) $\sum_{n=3}^\infty\frac{\sqrt[5]{n}-\sqrt[5]{n+1}}{\sqrt[5]{n^2+n}}\cdot\sum_{n=1}^\infty\frac{(-\sqrt{2})^{n+1}}{\sqrt[3]{21^{n-1}}}$ (ו) $\sum_{n=5}^\infty\frac{1}{(n-2)(n-3)}\cdot\sum_{n=1}^\infty\frac{(-3)^{n+1}}{\sqrt[4]{133^{n-1}}}$.

פתרון:

(א) מדובר בטור גיאומטרי שמנתו קטנה מ-1, ולכן מתכנס. סכום הטור הוא: $\frac{a_0}{1-q}=\frac{1}{1-2/3}=3$.

(ב) זהו טור טלסקופי. נחשב את הסכום החלקי ה- k -י:

$$s_k=\sum_{n=2}^{k}\left(\frac{1}{2^n}-\frac{1}{2^{n+1}}\right)=\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3}\right)+\left(\frac{1}{2^3}-\frac{1}{2^4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^k}-\frac{1}{2^{k+1}}\right)=$$
$$=\frac{1}{4}-\frac{1}{2^{k+1}}\xrightarrow{k\to\infty}\frac{1}{4}$$

ולכן: $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}-\frac{1}{2^{n+1}}\right)=\frac{1}{4}$.

(ג) נשים לב: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{9n^2+3n-2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-1)(3n+2)}$, ולכן:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-1)(3n+2)}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1/3}{3n-1}-\frac{1/3}{3n+2}\right)$$

שוב קיבלנו טור טלסקופי. נחשב את הסכום החלקי ה- k -י:

$$s_k=\sum_{n=1}^{k}\left(\frac{1/3}{3n-1}-\frac{1/3}{3n+2}\right)=\left(\frac{1/3}{2}-\frac{1/3}{5}\right)+\left(\frac{1/3}{5}-\frac{1/3}{8}\right)+\cdots+\left(\frac{1/3}{3k-1}-\frac{1/3}{3k+2}\right)=$$
$$=\frac{1/3}{2}-\frac{1/3}{3k+2}\xrightarrow{k\to\infty}\frac{1}{6}$$

ולכן: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{9n^2+3n-2}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1/3}{3n-1}-\frac{1/3}{3n+2}\right)=\frac{1}{6}$.

(ד) נחשב כל חלק בנפרד (טור אחד הוא טור הנדסי עם מנה קטנה מ-1, והטור השני הוא טור טלסקופי, ולכן שניהם מתכנסים):

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{7}{3^n}=\frac{7}{1-1/3}=\frac{21}{2}$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}-\frac{6}{(n+3)(n+4)}=(-6)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+3)(n+4)}=(-6)\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n+3}-\frac{1}{n+4}\right)=(-6)\frac{1}{3}=-2$$

ולכן: $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{7}{3^n}-\frac{6}{(n+3)(n+4)}\right)=\frac{21}{2}-2=\frac{17}{2}$.

(ה) נחשב כל טור בנפרד (טור אחד הוא טור גיאומטרי עם מנה קטנה מ-1, והטור השני הוא טור טלסקופי, ולכן שניהם מתכנסים):

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-\sqrt{2})^{n+1}}{\sqrt[3]{21^{n-1}}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-\sqrt{2})^{n+1}}{\left(\sqrt[3]{21}\right)^{n-1}}=\frac{-\sqrt{2}}{\left(\sqrt[3]{21}\right)^{-1}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-\sqrt{2})^{n}}{\left(\sqrt[3]{21}\right)^{n}}=\frac{-\sqrt{2}}{\left(\sqrt[3]{21}\right)^{-1}}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-\sqrt{2}}{\sqrt[3]{21}}\right)^{n}=$$
$$=-\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{21}\cdot\left(\frac{\frac{-\sqrt{2}}{\sqrt[3]{21}}}{1-\frac{-\sqrt{2}}{\sqrt[3]{21}}}\right)=-\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{21}\cdot\left(\frac{-\sqrt{2}}{\sqrt[3]{21}+\sqrt{2}}\right)=\frac{2\sqrt[3]{21}}{\sqrt[3]{21}+\sqrt{2}}$$
$$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{\sqrt[5]{n}-\sqrt[5]{n+1}}{\sqrt[5]{n^2+n}}=\sum_{n=3}^{\infty}\left(\frac{\sqrt[5]{n}}{\sqrt[5]{n^2+n}}-\frac{\sqrt[5]{n+1}}{\sqrt[5]{n^2+n}}\right)=\sum_{n=3}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt[5]{n+1}}-\frac{1}{\sqrt[5]{n}}\right)\overset{telescopic}{=}-\frac{1}{\sqrt[5]{3}}$$

ולכן:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-\sqrt{2})^{n+1}}{\sqrt[3]{21^{n-1}}}\cdot\sum_{n=3}^{\infty}\frac{\sqrt[5]{n}-\sqrt[5]{n+1}}{\sqrt[5]{n^2+n}}=\frac{2\sqrt[3]{21}}{\sqrt[3]{21}+\sqrt{2}}\cdot-\sqrt[5]{\frac{1}{3}}$$

(ו) נחשב כל טור בנפרד (טור אחד הוא טור גיאומטרי עם מנה קטנה מ-1, והטור השני הוא טור טלסקופי, ולכן שניהם מתכנסים):

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^{n+1}}{\sqrt[4]{133^{n-1}}}=\frac{-3}{\sqrt[4]{133}^{-1}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^{n}}{\left(\sqrt[4]{133}\right)^{n}}=-3\sqrt[4]{133}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-3}{\sqrt[4]{133}}\right)^{n}=$$

$$=-3\sqrt[4]{133}\frac{\frac{-3}{\sqrt[4]{133}}}{1-\frac{-3}{\sqrt[4]{133}}}=-3\sqrt[4]{133}\frac{-3}{\sqrt[4]{133}+3}=\frac{9\sqrt[4]{133}}{\sqrt[4]{133}+3}$$

$$\sum_{n=5}^{\infty}\frac{1}{(n-2)(n-3)}=\sum_{n=5}^{\infty}\frac{1}{(n-2)(n-3)}=\sum_{n=5}^{\infty}\left(\frac{1}{n-3}-\frac{1}{n-2}\right)=\frac{1}{2}$$

ולכן:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^{n+1}}{\sqrt[4]{133^{n-1}}}\cdot\sum_{n=5}^{\infty}\frac{1}{(n-2)(n-3)}=\frac{9\sqrt[4]{133}}{\sqrt[4]{133}+3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{9\sqrt[4]{133}}{2\sqrt[4]{133}+6}$$

1.7 חקרו את ההתכנסות של הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\sin(nx)$ לכל x ממשי.

עבור $x=k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$ מספר שלם מתקבל טור אפסים שבבירור מתכנס לאפס. נחקור את הטור עבור המקרה $x\neq k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. נניח שהטור מתכנס אז מהתנאי ההכרחי נקבל: $\lim_{n\to\infty}\left(\sin(nx)\right)=0$. מכאן נובע ש- $\lim_{n\to\infty}\left(\sin\left((n+1)x\right)\right)=0$, כלומר $\lim_{n\to\infty}\left(\sin(nx)\cos(x)+\sin(x)\cos(nx)\right)=0$. חוקי גבולות נותנים: $\lim_{n\to\infty}\cos(nx)=0$ וזו סתירה כי $\lim_{n\to\infty}\left(\cos^2(nx)+\sin^2(nx)\right)=1\neq 0$, כלומר הטור מתבדר במקרה זה.

1.8 השתמשו בקריטריון קושי להתכנסות סדרות כדי להוכיח שהטורים הבאים מתכנסים (כלומר, הראו שסדרות הסכומים החלקיים מהוות סדרות קושי):

(א) $\frac{\cos(x)-\cos(2x)}{1}+\frac{\cos(2x)-\cos(3x)}{2}+\ldots+\frac{\cos(nx)-\cos\left((n+1)x\right)}{n}+\ldots$.

נקבע $\varepsilon>0$ שרירותי ונמצא N כך שלכל $n>N$ ולכל p טבעי מתקיים $\left|S_{n+p}-S_n\right|<\varepsilon$. נתבונן ב-

$$\left|S_{n+p}-S_n\right|=\left|\frac{\cos\left((n+1)x\right)-\cos\left((n+2)x\right)}{n+1}+\frac{\cos\left((n+2)x\right)-\cos\left((n+3)x\right)}{n+2}+\right.$$

$$\left.\ldots+\frac{\cos\left((n+p)x\right)-\cos\left((n+p+1)x\right)}{n+p}\right|=$$

$$=\left|\frac{\cos\left((n+1)x\right)}{n+1}-\frac{\cos\left((n+2)x\right)}{(n+1)(n+2)}-\frac{\cos\left((n+3)x\right)}{(n+2)(n+3)}-\ldots-\frac{\cos\left((n+p)x\right)}{(n+p-1)(n+p)}-\frac{\cos\left((n+p+1)x\right)}{n+p}\right|\leq$$

$$\leq\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\ldots+\frac{1}{(n+p-1)(n+p)}+\frac{1}{n+p}<\frac{2}{n}$$

קיבלנו שעבור $N=\frac{2}{\varepsilon}$ התנאי מתקיים ולכן הטור מתכנס.

(ב) $\frac{\cos(x)}{1^2}+\frac{\cos\left(x^2\right)}{2^2}+\ldots+\frac{\cos\left(x^n\right)}{n^2}+\ldots$.

$$\left|S_{n+p}-S_n\right|=\left|\frac{\cos\left(x^{n+1}\right)}{(n+1)^2}+\frac{\cos\left(x^{n+2}\right)}{(n+2)^2}+\ldots+\frac{\cos\left(x^{n+p}\right)}{(n+p)^2}\right|\leq$$

$$\leq\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\ldots+\frac{1}{(n+p)^2}<\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\ldots+$$

$$+\frac{1}{(n+p-1)(n+p)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+p}<\frac{1}{n}$$

נגדיר $N=\frac{1}{\varepsilon}$ והטור מתכנס.

1.9 השתמשו בקריטריון קושי להתכנסות סדרות כדי להוכיח שהטורים הבאים מתבדרים:

(א) $1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\ldots$.

נוכיח שקיים $\varepsilon>0$ כך שלכל N קיימים $n>N$ ומספר טבעי p כך ש- $\left|S_{n+p}-S_n\right|\geq\varepsilon$. ניקח S_{6n} ו- S_{3n} ונראה ש-

$$S_{6n}-S_{3n}=\frac{1}{3n+1}+\frac{1}{3n+2}-\frac{1}{3n+3}+\ldots+\frac{1}{6n-2}+\frac{1}{6n-1}-\frac{1}{6n}>$$
$$>\frac{1}{3n+1}+\frac{1}{3n+4}+\ldots+\frac{1}{6n-2}>\frac{n}{6n-2}>\frac{1}{6}$$

והטור מתבדר.

(ב) $\frac{1}{\sqrt{1\cdot 2}}+\frac{1}{\sqrt{2\cdot 3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$.

נקבע את $\varepsilon=\frac{1}{4}$ ונעריך את $S_{2n}-S_n$

$$S_{2n}-S_n=\frac{1}{\sqrt{(n+1)(n+2)}}+\frac{1}{\sqrt{(n+2)(n+3)}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{2n(2n+1)}}>\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\ldots+\frac{1}{2n+1}>\frac{1}{4}$$

והטור מתבדר.